ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE
Estratto dai *Rendiconti*, Cl. di Scienze — Vol. LXXVII. Fasc. II — 1943-44.

# SUL SIGNIFICATO GEOMETRICO DI ALCUNI INVARIANTI DEI RAMI SUPERLINEARI ORDINARII DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE

Nota del dott. Carlo Felice Manara

ULRICO HOEPLI
Libraio del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere
MILANO
1943 - 44

# SUL SIGNIFICATO GEOMETRICO DI ALCUNI INVARIANTI DEI RAMI SUPERLINEARI ORDINARII DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE

Nota del dott. CARLO FELICE MANARA

(presentata dal M. E. Oscar Chisini il 26 maggio 1944)

**Sunto.** — Si dà il significato geometrico di alcuni invarianti per trasformazioni proiettive e più in generale puntuali regolari dei rami superlineari ordinari delle curve algebriche piane; invarianti la cui espressione è stata data in una nota precedente.

§ 1. - In una Nota precedente, pubblicata in questi stessi Rendiconti, ho dimostrato che i rami superlineari di classe 1 e di ordine maggiore di 3 delle curve algebriche piane posseggono degli invarianti per trasformazioni puntuali regolari. Nella presente Nota mi propongo di dare il significato geometrico degli invarianti trovati, dando anche dei risultati ottenuti alcune conseguenze immediate che credo non inutili ai fini di uno studio sistematico della geometria differenziale delle singolarità delle curve algebriche piane.

§ 2. - Consideriamo anzitutto un ramo $\gamma$ di ordine 4; scegliendo l'origine O di $\gamma$ come origine degli assi e la tangente a $\gamma$ come asse delle $x$, il ramo $\gamma$ stesso sarà rappresentato da uno sviluppo in serie di Puiseux del tipo

$$(1) \qquad y = a_1 x^{1+1/4} + a_2 x^{1+2/4} + a_3 x^{1+3/4} + \ldots\ldots \qquad \text{con } a_1 \neq 0\,.$$

Esso possiede un unico invariante relativo dato da

$$(2) \qquad \mathrm{I} = 11\, a_2^2 - 10\, a_1 a_3\,.$$

Cerchiamo di scrivere l'equazione di una curva che possegga in O la stessa singolarità e la stessa tangente del ramo $\gamma$; essa sarà data da

$$(3) \qquad y^4 = f_5(x, y) + f_6(x, y) + \ldots\ldots$$

dove si è indicata con $f_i$ una forma omogenea nelle variabili $x$ ed $y$ dell'ordine uguale al suo indice ed in particolare è

$$(4) \quad f_5(x, y) = a_{50} x^5 + a_{41} x^4 y + a_{32} x^3 y^2 + a_{23} x^2 y^3 + a_{14} x y^4 + a_{05} y^5$$

con $a_{50} \neq 0$.

Scrivendo le relazioni che legano i coefficienti dello sviluppo (1) a quelli della curva (3) si hanno le equazioni

$$(5) \quad \begin{cases} a_1^4 = a_{50} \\ 4 a_1^2 a_2 = a_{41} \\ 4 a_1^3 a_3 + 6 a_1^2 a_2^2 = a_{41} a_2 + a_{32} a_1^2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Consideriamo ora il sistema lineare $\infty^3$ di quintiche

$$(6) \quad y^4 = a_{50} x^5 + a_{41} x^4 y + a_{32} x^3 y^2 + \lambda_1 x^2 y^3 + \lambda_2 x y^4 + \lambda_3 y^5$$

dove $a_{50}$ $a_{41}$ $a_{32}$ sono dati dalle equazioni (5) e $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sono parametri indeterminati. Tutte le quintiche di questo sistema posseggono in 0 un punto quadruplo origine di un ramo di ordine 4 e di classe 1, il cui sviluppo coincide, in base alle (5), con quello del ramo (1) fino al termine $a_3 x^{1+3/4}$ incluso, e quindi hanno in 0 col ramo (1) 23 intersezioni riunite. Possiamo ora fare la osservazione fondamentale che è unica la coppia polare terza della tangente al ramo (1) rispetto alle $\infty^3$ cinquine di rette per 0 che si ottengono uguagliando a zero il II membro delle quintiche (6) legate al ramo stesso, ossia ponendo

$$(7) \quad a_{50} x^5 + a_{41} x^4 y + a_{32} x^3 y^2 + \lambda_1 x^2 y^3 + \lambda_2 x y^4 + \lambda_3 y^5 = 0$$

essendo $a_{50}$ $a_{41}$ $a_{32}$ legati dalle (5) ai coefficienti dello sviluppo del ramo. Infatti, a calcoli eseguiti, tale coppia risulta data da

$$(8) \quad 10 a_{50} x^2 + 4 a_{41} x y + a_{32} y^2 = 0 .$$

Introducendo nel fascio di centro 0 la coordinata $t = x/y$ (con che la tangente al ramo viene ad assumere la coordinata $t = \infty$) la (8) diventa

$$(9) \quad 10 a_{50} t^2 + 4 a_{41} t + a_{30} = 0 .$$

Il discriminante di tale coppia vale

$$(10) \quad \Delta = 16 a_{41}^2 - 40 a_{32} a_{50} = 8 (2 a_{41}^2 - 5 a_{32} a_{50}) = \\ = 16 a_1^4 (11 a_2^2 - 10 a_3 a_1) = 16 a_1^4 \mathrm{I} .$$

Dalla condizione $a_{50} \neq 0$ si deduce che nessuno degli elementi della coppia (9) può coincidere con la tangente al ramo; inoltre per il modo come la coppia (9) è stata ottenuta, essa è covariante della (3) per trasformazioni proiettive. Per dimostrarlo basta evidentemente verificare il fatto per proiettività che mantengano la tangente al ramo (1) ossia per proiettività date da formule del tipo

$$(11) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{a\,x + b\,y}{1 + m\,x + n\,y} \\[2ex] Y = \dfrac{c\,y}{1 + m\,x + n\,y} \end{cases} \qquad \text{con } a \neq 0 \text{ e } c \neq 0$$

Ora la (11) può essere ottenuta mediante l'applicazione successiva delle proiettività seguenti

$$(11)' \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{x}{1 + m\,x + n\,y} \\[2ex] y' = \dfrac{y}{1 + m\,x + n\,y} \end{cases}$$

$$(11)'' \qquad \begin{cases} X = a\,x' + b\,y' \\ Y = \qquad\quad c\,y' \end{cases}$$

e basterà provare il fatto separatamente per le (11)' e (11)''. Sostituendo nella (6) i valori dati dalle (11)' si verifica che i coefficienti $a_{50}$ $a_{41}$ $a_{32}$ rimangono invariati; la (11)'' poi è una affinità da cui ogni forma $f_5(x, y)$ viene mutata in una $F_5(X, Y)$, e poichè la retta $y = 0$ è mutata in sè, anche la polare terza della $y = 0$ rispetto ad $f_5$ sarà mutata nella polare terza della $Y = 0$ rispetto ad $F_5$. In più la proprietà vale anche quando, invece di trasformazioni proiettive si considerino trasformazioni puntuali qualunque. Anche qui basterà dimostrare il fatto per trasformazioni puntuali che mantengano la direzione della tangente al ramo, ossia per trasformazioni date da formule del tipo

$$(12) \qquad \begin{cases} X = \alpha_{10}x + \alpha_{01}y + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \dots \\ Y = \qquad\qquad \beta_{01}y + \beta_{20}x^2 + \beta_{11}xy + \beta_{02}y^2 + \dots \end{cases} \qquad \text{con } \alpha_{10} \neq 0 \text{ e } \beta_{01} \neq 0$$

Considerando il modo di agire della (12) sui coefficienti della (3) si vede che su $a_{50}$ $a_{41}$ $a_{32}$ agiscono solo i termini di primo grado delle formule (12), ossia che qualunque trasformazione puntuale del tipo (12) applicata al ramo (1) e quindi alle curve (6), agisce sui coefficienti $a_{50}$ $a_{41}$ $a_{32}$ come la trasformazione affine che la approssima nell'intorno del I ordine. Ne deduciamo che la coppia di direzioni nel fascio 0 definita dalla (9) è covariante del ramo (1) anche per trasformazioni puntuali. Il significato geometrico dell'invariante I è quindi immediatamente dato dal seguente

*Teorema I* - Dato un ramo superlineare ordinario di ordine 4 e di classe 1 è possibile definire una coppia di direzioni certamente distinte da quella della tangente e covariante di esso per trasformazioni puntuali; essa è data dalla coppia polare terza della direzione della tangente al ramo rispetto alla cinquina di direzioni definita dalla equazione

$$f_5(t, 1) = 0$$

essendo $y^4 = f_5(x, y)$ una qualunque quintica del sistema lineare $\infty^3$ di quintiche aventi nell'origine del ramo la sua stessa singolarità, la sua stessa tangente e 23 intersezioni riunite con esso. L'annullarsi o meno dell'invariante I esprime che tale coppia è formata o meno da direzioni coincidenti.

§ 3. - L'estensione dei risultati precedenti al caso dei rami di ordine 5 è immediata. Assumendo anche qui l'origine 0 del ramo come origine degli assi e la tangente come asse $x$, un tale ramo è dato da

$$(13) \qquad y = a_1 x^{1+1/5} + a_2 x^{1+2/5} + a_3 x^{1+3/5} + a_4 x^{1+4/5} + \dots \qquad \text{con } a_1 \neq 0$$

esso possiede due invarianti relativi

$$(14) \qquad \begin{cases} J = 13\, a_2^2 - 12\, a_1\, a_3 \\ K = 27\, a_1^2\, a_4 - 63\, a_1\, a_2\, a_3 + 35\, a_2^3 \end{cases}$$

ed un invariante assoluto

$$(15) \qquad U = J^3 / K^2 .$$

I calcoli si svolgono in modo perfettamente analogo al caso precedente. Si pone anche qui

$$(16) \qquad y^5 = f_6(x, y) + f_7(x, y) + \dots$$

dove

$$(17) \qquad \begin{aligned} f_6(x, y) = {} & a_{60}\, x^6 + a_{51}\, x^5 y + a_{42}\, x^4 y^2 + a_{33}\, x^3 y^3 + \\ & + a_{24}\, x^2 y^4 + a_{15}\, x y^5 + a_{06}\, y^6 \qquad \text{con } a_{60} \neq 0 . \end{aligned}$$

Le equazioni che legano i coefficienti dello sviluppo (13) con quelli di $f_6$ sono

$$(18)\quad \begin{cases} a_1^5 & = a_{60} \\ 5\,a_1^3\,a_2 & = a_{51} \\ 5\,a_1^4\,a_3 + 10\,a_1^3\,a_2^2 & = a_{51}\,a_2 + a_{42}\,a_1^2 \\ 5\,a_1^4\,a_4 + 20\,a_1^3\,a_2\,a_3 + 10\,a_1^2\,a_2^3 & = a_{51}\,a_3 + 2\,a_{42}\,a_1\,a_2 + a_{33}\,a_1^3\,. \\ \dots\dots\dots & \end{cases}$$

Anche in questo caso tutte le sestiche del sistema lineare $\infty^3$

$$(19)\qquad \begin{aligned} y^5 = a_{60}\,x^6 + a_{51}\,x^5\,y + a_{42}\,x^4\,y^2 + a_{33}\,x^3\,y^3 + \\ + \lambda_1\,x^2\,y^4 + \lambda_2\,x\,y^5 + \lambda_3\,y^6 \end{aligned}$$

dove $a_{60}$ $a_{51}$ $a_{42}$ $a_{33}$ sono dati dalle (18) e $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ sono parametri indeterminati, posseggono in 0 un punto 5-plo, origine di un ramo di ordine 5 e classe 1, il cui sviluppo, in base alle (18), coincide con quello del ramo (13) fino al termine $a_4\,x^{1+4/5}$ incluso, e quindi posseggono 34 intersezioni riunite in 0 con tale ramo. Anche in questo caso è unica la terna di rette polare terza della tangente al ramo (13) rispetto alle $\infty^3$ sestine ottenute uguagliando a zero il II membro delle (19) ossia ponendo

$$(20)\qquad \begin{aligned} a_{60}\,x^6 + a_{51}\,x^5\,y + a_{42}\,x^4\,y^2 + a_{33}\,x^3\,y^3 + \\ + \lambda_1\,x^2\,y^4 + \lambda_2\,x\,y^5 + \lambda_3\,y^6 = 0 \end{aligned}$$

(essendo $a_{60}$ $a_{51}$ $a_{42}$ $a_{33}$ dati dalla (18)) e tale terna è data da

$$(21)\qquad 20\,a_{60}\,x^3 + 10\,a_{51}\,x^2\,y + 4\,a_{42}\,x\,y^2 + a_{33}\,y^3 = 0\,.$$

Anche qui la condizione $a_{60} \neq 0$ ci assicura che tale terna polare non contiene la tangente; posto di nuovo $t = x/y$ otteniamo

$$(22)\qquad 20\,a_{60}\,t^3 + 10\,a_{51}\,t^2 + 4\,a_{42}\,t + a_{33} = 0$$

e la (22) può ritenersi rappresentare la quaterna di direzioni nel fascio 0 formata dalla direzione della tangente al ramo (di coordinata $t = \infty$) e dalla terna polare terza di essa rispetto ad una qualunque sestina (20). Se calcoliamo gli invarianti $i$ e $j$ di tale quaterna [1] otteniamo

$$(23)\quad i = 20\,(5\,a_{51}^2 - 12\,a_{60}\,a_{42}) = 100\,a_1^6\,(13\,a_2^2 - 12\,a_1\,a_3) = 100\,a_1^6\,\mathrm{J}$$

---

[1] Cfr. per es. ENRIQUES e CHISINI, *Teoria Geometrica delle equazioni algebriche,* Libro I, Cap. I, § 4.

$$(24) \qquad j = 200\,(54\, a_{60}^{\,2}\, a_{33} - 36\, a_{60}\, a_{51}\, a_{42} + 10\, a_{51}^{\,3}) =$$
$$= 2000\, a_1^{\,9}\,(27\, a_1^{\,2}\, a_4 - 63\, a_1\, a_2\, a_3 + 35\, a_2^{\,3}) = 2000\, a_1^{\,9}\, \mathrm{K}\,.$$

Con ragionamenti e calcoli che non stiamo a ripetere perchè del tutto analoghi a quelli valevoli nel caso precedente si verifica che anche in questo caso la terna (22) è indipendente dalla particolare curva del sistema (19), covariante per ciascuna di esse, risultando così covariante proiettiva dell'intero sistema lineare e quindi dei primi termini dello sviluppo (13) che lo definiscono. Inoltre si verifica ancora che, sottoposto il ramo ad una trasformazione puntuale del tipo (12), i coefficienti $a_{60}\ a_{51}\ a_{42}\ a_{33}$ sono influenzati solo dai termini di primo grado delle formule, per cui la terna (22) è covariante del ramo (13) per trasformazioni non solo proiettive ma anche puntuali. Come conclusione possiamo enunciare il seguente

*Teorema II* - Dato un ramo superlineare di ordine 5 e classe 1 è possibile definire una terna di direzioni certamente distinte dalla tangente e covariante di esso per trasformazioni topologiche; essa è data dalla terna polare terza della direzione della tangente rispetto alla sestina di direzioni definita da

$$f_6\,(t, 1) = 0$$

essendo $y^5 = f_6\,(x, y)$ l'equazione di una qualunque sestica del sistema lineare $\infty^8$ di sestiche aventi nell'origine del ramo la sua stessa singolarità, la sua stessa tangente e 34 intersezioni riunite con esso. L'annullarsi degli invarianti J e K del ramo indica che la quaterna formata dalla direzione della tangente e dalla terna suddetta è rispettivamente equianarmonica od armonica. L'invariante assoluto $4\, i^3 / j^2$ della quaterna coincide con l'invariante assoluto U del ramo.

Dalla trattazione fatta deduciamo facilmente il seguente

*Corollario* - L'elemento singolare di curva algebrica piana di ordine 5 e classe 1 definito dai primi 4 termini dello sviluppo (13) è in generale rigido per trasformazioni proiettive e puntuali; fa ovviamente eccezione il caso in cui l'invariante assoluto U sia indeterminato od abbia qualcuno dei valori $\infty$, 0.

Si verifica facilmente, come era naturale a priori, che se U ha il valore $\infty$ o 0 l'elemento suddetto è mutato in sè da un gruppo di proiettività ciclico rispettivamente di ordine 2 e 3.

Si può quindi parlare di rami superlineari del V ordine armonici od equianarmonici.

Estratto dai *Rendiconti* dell' Istituto Lombardo di scienze e lettere
Vol. LXXVII, 8° della Serie III, Fasc. II.

Pavia — Premiata Tipografia Successori Fusi — 1944

Premiata Tipografia Successori FUSI — Pavia, Via L. Spallanzani 11 - 1944